

**Małgorzata HYB<sup>1</sup>, Wojciech HYB<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Katedra Geoinżynierii SGGW  
Department of Geotechnical Engineering WAU

<sup>2</sup>Katedra Zastosowań Matematyki SGGW  
Department of Applied Mathematics WAU

## **Zastosowanie pewnego modelu matematycznego do prognozy liczby ludności świata**

### **Application of some mathematical model to the world population projection**

**Słowa kluczowe:** ludność świata, model matematyczny, prognoza, błąd

**Key words:** world population, mathematical model, projection, error

#### **Wprowadzenie**

Zagadnienie prognozy liczby ludności świata, kontynentu czy kraju jest ważnym problemem demografii. Stosowane dotychczas modele oparte były na krzywej logistycznej i funkcji postaci zaproponowanej w pracy Smolik (1996):

$$y = a \cdot \arctg(b \cdot e^{c \cdot t}) \quad (1)$$

gdzie  $t$  jest numerem roku. Współczynniki wyżej wymienionych modeli wyznaczane były klasyczną metodą najmniejszych kwadratów, prowadzącą do maksymalizacji współczynnika korelacji krzywoliniowej (Elandt 1964). W pracy Hyb i Kalety (2004) poddano

analizie model postaci (1), którego współczynniki wyznaczono, minimalizując procentowy średni błąd względny (Hyb 2003) i otrzymano znacznie dokładniejszą prognozę liczby ludności świata (Hyb i Kaleta 2004, tab. 2).

Celem pracy jest zastosowanie do prognozy liczby ludności świata modelu postaci

$$y = a + b \cdot |t + c|^d \quad (2)$$

którego współczynniki wyznaczono metodą opisaną w pracach Hyb (2003) i Hyb i Kalety (2004).

#### **Wyznaczenie współczynników modelu i prognoza liczby ludności świata**

W pracy przyjęto następujące oznaczenia

$y_t$  – rzeczywista liczba ludności świata (w mln) w roku o numerze  $t$ ,

$\hat{y}_t$  – liczba ludności świata (w mln) obliczona wzorem (2) dla roku o numerze  $t$ ,

$MRE \cdot 100\%$  – procentowy średni błąd względny (mean relative error) określony wzorem (Hyb 2003)

$$MRE \cdot 100\% = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} \cdot 100\% = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|y_t - (a + b \cdot |t + c|^d)|}{y_t} \cdot 100\% \quad (3)$$

Do wyznaczenia wartości współczynników  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  modelu (2) użyto danych z lat 1950–1985, przyjmując za

$t = 1$  rok 1950 oraz za  $t = 36$  rok 1985, analogicznie jak w pracach Smolik (1996) i Hyb i Kalety (2004). Minimalizując procentowy średni błąd względny (3), uzyskano funkcję regresji w postaci:

$$\hat{y}_t = 2514 + 24 \cdot |t - 1,29|^{1,29} \quad (4)$$

Za pomocą funkcji regresji (4) wyznaczono prognozę liczby ludności świata na lata 1986–2000 i sprawdzono jej dokładność za pomocą błędów względnych  $RE_t$  (relative error), obliczonych wzorem

$$RE_t = \frac{|y_t - \hat{y}_t|}{y_t} \cdot 100\% \quad (5)$$

Wyniki przedstawiono w tabeli 1.

TABELA 1. Prognoza liczby ludności świata na lata 1986–2000 otrzymana z modelu (4)  
TABLE 1. World population projection on 1986–2000 obtained by model (4)

Rok Year	Nr roku ( $t$ ) Numer of the year ( $t$ )	$y_t$	$\hat{y}_t$	$RE_t$ [%]
1986	37	4917	4927,9	0,22
1987	38	4998	5015,5	0,35
1988	39	5112	5103,7	0,16
1989	40	5202	5192,6	0,18
1990	41	5292	5282,2	0,18
1991	42	5385	5372,5	0,23
1992	43	5480	5463,4	0,30
1993	44	5572	5554,9	0,31
1994	45	5630	5647,0	0,30
1995	46	5695	5739,8	0,79
1996	47	5778	5833,1	0,95
1997	48	5862	5927,1	1,11
1998	49	5948	6021,6	1,24
1999	50	6034	6116,8	1,37
2000	51	6122	6212,4	1,48
<b>Średni błąd/Average error</b>				<b>0,61</b>

## Porównanie modeli i wnioski końcowe

Analiza wyników przedstawionych w tabeli 1 prowadzi do wniosku, że model (4) daje dobre przybliżenie rzeczywistej liczby ludności świata, ponieważ błąd względny prognozy jest stosunkowo niewielki i w ciągu pierwszych dziewięciu lat jest nie większy niż 0,35%, a dopiero w dwunastym roku osiąga wartość ponad 1%.

W celu porównania prognoz otrzymanych w tej pracy oraz w pracach Smolik (1996) i Hyb i Kalety (2004) sporządzono tabelę 2, w której przedstawiono wyniki prognozy na lata 2001–2003 dla trzech wymienionych wyżej modeli (prognoza taka nie była dotąd prezentowana). Przyjęto następujące oznaczenia:

$$\hat{u}_t = 19\,000 \cdot \arctg(0,127 e^{0,02t}) \quad (6)$$

jest funkcją regresji zaproponowaną w pracy Smolik (1996), a także Hyb i Kalety (2004), wzór (3):

$$\hat{z}_t = 9500 \cdot \arctg(0,254 e^{0,022t}) \quad (7)$$

jest funkcją regresji z pracy Hyb i Kalety (2004), wzór (5).

Następnie sporządzono tabelę 3, w której zestawiono ogólne wyniki prognozy liczby ludności świata na lata 1986–2003 dla trzech modeli. W tabeli tej MRE oznacza średni błąd względny obliczony wzorem (3) dla okresu prognozy (od  $t = 37$  do  $t = 54$ ),  $\varphi^2$  jest współczynnikiem zgodności, a  $R$  jest współczynnikiem korelacji w procentach obliczonymi ze wzorów:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=37}^{54} (y_t - \bar{y}_t)^2}{\sum_{t=37}^{54} (y_t - \bar{y}_t)^2}$$

$$R = \sqrt{1 - \varphi^2} \cdot 100\%$$

gdzie  $\bar{y}_t$  oznacza średnią wartość  $y_t$  dla  $t = 37, 38, \dots, 54$ . Należy zauważyć, że średnie błędy względne, współczynniki zgodności i korelacji obliczane są dla każdego modelu oddzielnie.

Porównanie wyników przedstawionych w tabelach 1, 2 i 3 i w pracy Hyb i Kaleta (2004) (tab. 2) prowadzi do

TABELA 2. Prognoza liczby ludności świata na lata 2001–2003 dla trzech modeli  
TABLE 2. World population projection on 2001–2003 for three models

Nr roku ( $t$ ) Number of the year ( $t$ )	52	53	54
Rok / Year	2001	2002	2003
$y_t$	6211	6302	6393
$\hat{y}_t$ wzór (4) / formula (4)	6308,7	6405,5	6502,8
$RE_t$ %	1,57	1,64	1,72
$\hat{u}_t$ wzór (6) / formula (6)	6554,0	6675,8	6799,6
$RE_t$ %	5,52	5,93	6,36
$\hat{z}_t$ wzór (7) / formula (7)	6368,1	6469,5	6571,4
$RE_t$ %	2,53	2,66	2,79

TABELA 3. Ogólne wyniki prognozy liczby ludności świata na lata 1986–2003 dla trzech modeli  
 TABLE 3. General results of world population projection on the years 2001–2003 for three models

Model	MRE:100%	$\phi^2$	R [%]
Wzór (4) / formula (4)	0,78	0,0182	99,08
Wzór (6) / formula (6)	2,81	0,2316	87,66
Wzór (7) / formula (7)	1,17	0,0474	97,96

wniosku, że za pomocą modelu (4) uzyskuje się znacznie lepszą prognozę liczby ludności świata na lata 1986–2003, szczególnie w długim przedziale czasowym. Można stwierdzić, że im dłuższy jest okres prognozy, tym lepsze wyniki daje funkcja regresji (4) w porównaniu z innymi modelami. Pewną wadą modelu (4) jest to, że wraz ze wzrostem czasu ( $t$ ) liczba ludności świata rośnie nieograniczenie. Prognozy tej liczby na połowę roku 2031 są jednakowe dla funkcji (4) i (7) i wynoszą około 9370 mln, a w następnych latach wartości funkcji (4) są większe niż wartości funkcji (7). Natomiast funkcje (6) i (7) mają asymptotę poziomą, która daje górne ograniczenie liczby ludności świata (patrz Hyb, Kaleta 2004).

## Literatura

- ELANDT R. 1964: Statystyka matematyczna w zastosowaniu do doświadczałnictwa rolniczego. PWN, Warszawa.
- HYB M. 2003: Analiza statystyczna wybranych charakterystyk konsolidacyjnych gruntów organicznych. *Przegląd Naukowy Inżynieria i Kształtowanie Środowiska* 2 (27): 56–65.
- HYB W., KALETA J. 2004: Porównanie metod wyznaczania współczynników modelu matematycznego na przykładzie prognozy liczy

by ludności świata. *Przegląd Naukowy Inżynieria i Kształtowanie Środowiska* 2 (29): 94–99.

SMOLIK S. 1985: Wyznaczanie parametrów krzywej logistycznej. *Przegląd Statystyczny* XXXII, 4: 365–373.

SMOLIK S. 1996: Long-term Projection of Numerical Growth of Population. II Krajowa Konferencja Zastosowań Matematyki w Biologii i Medycynie.

## Summary

### Application of some mathematical model to the world population projection.

A new mathematical model has been proposed to describe the growth of world population – see formula (2). The coefficients of this model have determined by fit measure (3). Applying the regression function (4) one can obtain more exact world population projection on the years 1986–2003 – see tables 1, 2 and 3.

### Authors' addresses:

Małgorzata Hyb  
 Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
 Katedra Geoinżynierii  
 ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa  
 Poland

Wojciech Hyb  
 Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
 Katedra Geoinżynierii  
 ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa  
 Poland