

Elżbieta KUBRAK

Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska SGGW
Department of Hydraulic Engineering and Environmental Recultivation WAU

O obliczaniu przepustowości koryt rzecznych Evaluation of channels discharge capacity

Słowa kluczowe: przepustowość, współczynnik oporu

Key words: channels discharge capacity, friction factors

Wprowadzenie

Zależność pomiędzy głębokością przepływu wody w korytach a natężeniem przepływu określić można na podstawie bezpośrednich pomiarów lub obliczeń prowadzonych w założeniu ustalonego jednostajnego przepływu w korycie. Ten drugi sposób ma szczególne znaczenie w praktyce projektowej. Obliczenia średniej prędkości przepływu w korytach prowadzi się zwykle zależnościami potęgowymi lub na podstawie uniwersalnego prawa przepływu.

Wykorzystywanie zależności potęgowych do obliczania średniej prędkości przepływu w korytach otwartych ma swoją długą tradycję (Hager 1988, 2001, Kubrak 1998). Cechą wspólną wspomnianych zależności jest empiryczny charakter i prosta struktura, co bardzo ułatwia obliczenia. Współcze-

śnie wykorzystywana jest przez inżynierów zależność Gaucklera-Manninga-Stricklera, zapisywana w postaci:

$$v = k_{st} R^{2/3} J^{1/2} \quad (1)$$

gdzie:

R – promień hydrauliczny przekroju strumienia w korycie [m],

k_{st} – współczynnik szorstkości koryta wprowadzony przez Stricklera [$m^{1/3}/s$],

J – spadek linii energii przyjmowany jako równy spadkowi dna (i) w warunkach ustalonego jednostajnego przepływu ($J = i$),

v – średnia prędkość przepływu [m/s].

Współczynnik szorstkości koryta wprowadzony przez Stricklera wyrażany jest zależnością:

$$k_{st} = \frac{26}{k^{1/6}} \quad (2)$$

gdzie k jest chropowatością bezwzględną powierzchni koryta [m].

W krajach anglojęzycznych stosuje się w miejsce współczynnika szorstkości Stricklera współczynnik szorstkości Manninga. Oba współczynniki powiązane są zależnością:

$$k_{st} = \frac{1}{n} \quad (3)$$

n – współczynnik szorstkości koryta do wzoru Manninga [$m^{-1/3} \cdot s$].

Wykorzystując zależności (1) – (3) Gaucklera-Manninga-Stricklera do obliczeń średniej prędkości przepływu w korytach, należy pamiętać o ich ograniczeniach (Naudascher 1992):

- wprowadzone współczynniki szorstkości nie uwzględniają lepkości wody, więc zależności (1) – (3) są ważne jedynie w strefie hydraulicznie szorstkiego przepływu,
- współczynniki szorstkości nie uwzględniają relacji pomiędzy chropowatością powierzchni koryta i głębokością przepływu w korycie, tzw. chropowatości względnej koryta,
- współczynniki szorstkości k_{st} oraz n nie są bezwymiarowe i są wyznaczone dla jednego określonego napełnienia w korycie,
- promień hydrauliczny nie jest wystarczającą charakterystyką kształtu przekroju strumienia, więc wyznaczone współczynniki odnoszą się do określonego kształtu przekroju koryta.

Z wyżej wymienionych względów do obliczania średniej prędkości przepływu w korytach zostało zapożyczony z hydrauliki przewodów zamkniętych uniwersalne prawo przepływu. Wyprowadzono je na podstawie teorii Prandtla o tzw. drodze mieszania. Hydrauliczne warunki przepływu w przewodach scharakteryzowano bezwymiarowym współczynnikiem oporów λ wyznaczanym z zależności podanej

przez Colebrooka i White'a (Kubrak 1998):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k/4R}{3,71} \right) \quad (4)$$

gdzie:

Re – liczba Reynoldsa obliczana ze związku $Re = \frac{v4R}{\nu}$,

ν – kinematyczny współczynnik lepkości wody [m^2/s],

k – bezwzględna chropowatość powierzchni przewodu [m].

Z zależności (4) wynika, że współczynnik oporów (λ) w przewodach zamkniętych jest uzależniony od liczby Reynoldsa i chropowatości względnej ich powierzchni $k/4R$. Opory w hydraulicznie gładkim obszarze przepływu ($k \approx 0$) zależą od lepkości cieczy i dlatego w zależności (4) pomijany jest składnik $\frac{k/4R}{3,71}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (4a)$$

Opory w hydraulicznie szorstkim obszarze przepływu uzależnione są przede wszystkim od chropowatości względnej powierzchni koryta

($Re \rightarrow \infty$), więc składnik $\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \approx 0$

i zależność (4) upraszczają się do postaci:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/4R}{3,71} \right) \quad (4b)$$

Średnią prędkość przepływu w przewodach oblicza się z empirycznie po-

twierdzonej zależności Darcy'ego-Weisbacha:

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{RJ} \quad (5)$$

gdzie g – przyspieszenie ziemskie [m/s^2].

Zależności (4) i (5) nazywane są uniwersalnym prawem przepływu. Wyznaczane z zależności (4) współczynniki oporów przepływu w korycie wymagają jednak powiązania z kształtem przekroju i strukturą chropowatości powierzchni koryta. Wpływ tych dwóch czynników nie został uwzględniony w pełni w zależności Colebrooka-White'a. Pomimo tych niedoskonałości uniwersalne prawo przepływu jest stosowane także w hydraulice koryt otwartych, gdyż:

- współczynniki oporów (λ) wyrażone zależnością (4) uwzględniają wpływ lepkości wody i chropowatości ścian,
- współczynniki oporów (λ) są bezwymiarowe i umożliwiają uwzględnienie dodatkowych oporów wywołanych np. roślinami porastającymi koryto i opisanych dodatkowymi modelami.

Porównanie obliczanych współczynników oporu i prędkości przepływu w korytach

Strefa hydraulicznie szorstkiego przepływu. Przyczyną rozbieżności w obliczanych wartościach prędkości są różnice w wartościach współczynników oporu/szorstkości. W celu znalezienia zależności między współczynnikami

szorstkości ze wzoru Stricklera i współczynnikami oporów w strefie przepływu hydraulicznie szorstkiego przekształcono zależność Stricklera (1), (2) do postaci:

$$\begin{aligned} v_{St} &= \frac{26}{k^{1/6}} R^{2/3} J^{1/2} = 26 \left(\frac{R}{k} \right)^{1/6} R^{1/2} J^{1/2} = \\ &= \frac{26}{4^{1/6} (8g)^{1/2}} \left(\frac{4R}{k} \right)^{1/6} (8g)^{1/2} R^{1/2} J^{1/2} = \\ &= \frac{2,33}{(k/4R)^{1/6}} \sqrt{8gRJ} \end{aligned} \quad (6)$$

Przez porównanie zależności (5) i (6) wyrażono współczynnik oporów w funkcji chropowatości względnej powierzchni koryta według wzoru Stricklera:

$$\frac{2,33}{(k/4R)^{1/6}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \quad (7)$$

to znaczy:

$$\lambda_{St} = 0,184 \left(\frac{k}{4R} \right)^{1/3} \quad (8)$$

Natomiast współczynnik oporów (λ) do wzoru Darcy'ego-Weisbacha wyznaczono w obszarze hydraulicznie szorstkiego przepływu z zależności (4b):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/4R}{3,71} \right) \quad (9)$$

skąd

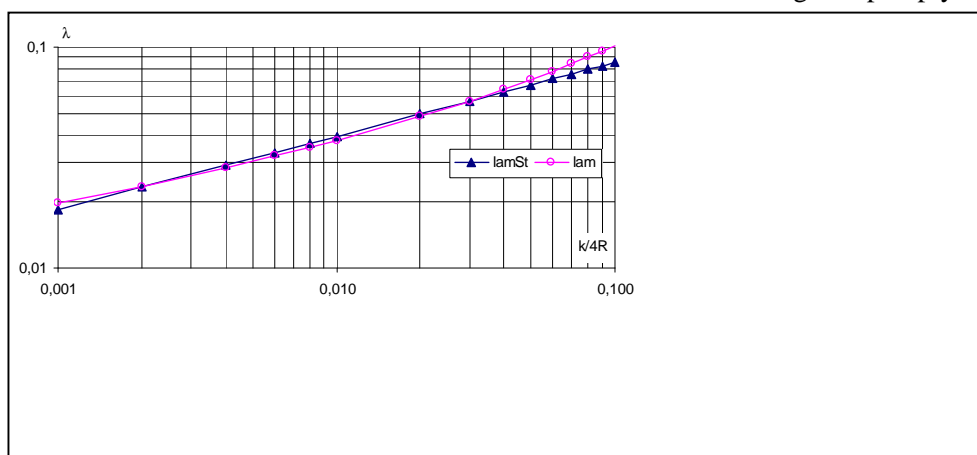
$$\lambda = \frac{1}{\left[-2 \log \left(\frac{k/4R}{3,71} \right) \right]^2} \quad (10)$$

Wartości współczynników oporów obliczone z zależności (8) i (10) przedstawiono na rysunku 1. Jak z niego wynika, wartości współczynników oporów obliczane ze wzoru Colebrooka-White'a są w strefie hydraulicznie szorstkiego przepływu większe od wartości współczynników oporu, odpowiadających wartościom szorstkości we wzorze Stricklera dla $k/4R < 0,002$ lub $k/4R > 0,030$. Natomiast współczynniki oporów obliczone z obu wzorów są zbliżone dla chropowatości względnych $k/4R \in (0,002; 0,030)$.

– v_{St} , i wzorem Darcy'ego-Weisbacha (4b), (5) – v , można wrazić w postaci:

$$\frac{v_{St}}{v} = \frac{\frac{26}{(k/R)^{1/6}} \sqrt{RJ}}{2 \log \frac{14,84}{k/R} (8g)^{1/2} \sqrt{RJ}} = \frac{1,467}{\left(\frac{k}{R}\right)^{1/6} \log \frac{14,84}{k/R}} \quad (11)$$

Zmienność stosunku prędkości średnich wyrażonych wzorem Stricklera i Darcy'ego-Weisbacha w strefie hydraulicznie szorstkiego przepływu



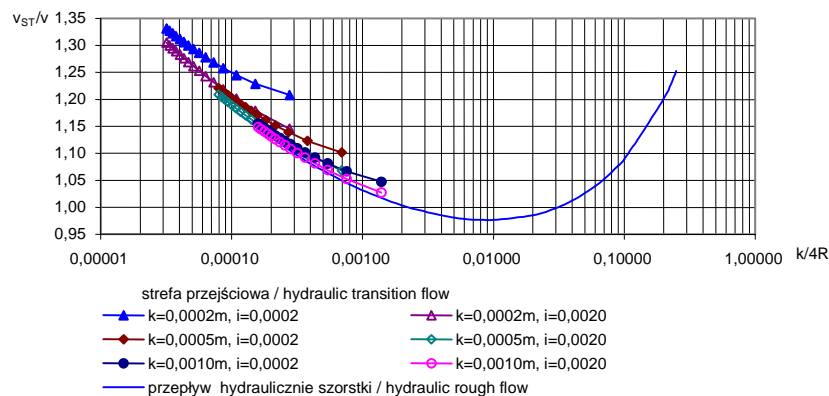
RYSUNEK 1. Współczynniki oporów w strefie hydraulicznie szorstkiego przepływu obliczone ze wzoru Stricklera (lamSt) i zależności Colebrooka-White'a (lam) wyrażone w funkcji chropowatości względnej koryta ($k/4R$)

FIGURE 1. Friction factors in the hydraulically rough zone calculated with the use of both Strickler (lamSt) and Colebrook-White formulae (lam) in relation to the relative roughness of the channel ($k/4R$)

Ogólna analiza porównawcza wartości prędkości oraz współczynników oporu obliczanych w korycie ze wzoru Stricklera i z uniwersalnego prawa przepływu jest możliwa jedynie w obszarze hydraulicznie szorstkiego przepływu. Stosunek prędkości średnich obliczanych wzorem Stricklera (1), (2)

w zależności od chropowatości względnej $k/4R$ pokazano na rysunku 2.

Z rysunku 2 wynika, że w strefie przepływu hydraulicznie szorstkiego dla chropowatości względnych $k/4R \in (0,002; 0,030)$ wartości prędkości średnich obliczone wzorem Stric-



RYSUNEK 2. Stosunek prędkości średniej obliczonej wzorem Stricklera (v_{St}) i Darcy'ego-Weisbacha (v) w funkcji chropowatości względnej powierzchni koryta ($k/4R$) w obszarze przepływu przejściowego i hydraulicznie szorstkiego
 FIGURE 2. The ratio of Strickler and Darcy-Weisbach velocities for transition zone and fully rough zone in relation to relative roughness ($k/4R$)

klera są do około 3% mniejsze od otrzymanych z zależności Darcy'ego-Weisbacha. Relacja między obliczonymi prędkościami zmienia się dla chropowatości względnych powierzchni przy $k/4R < 0,002$ lub $k/4R > 0,030$. Prędkości średnie obliczone wtedy wzorem Stricklera są większe od wartości otrzymanych ze wzoru Darcy'ego-Weisbacha, a maksymalne różnice mogą przekraczać nawet 20%. Podsumowując, można stwierdzić, że w strefie przepływu hydraulicznie szorstkiego dla $0,001 < k/4R < 0,050$ różnice w obliczonych wartościach prędkości wahają się w przedziale $-3\% < v_{St}/v < 3\%$.

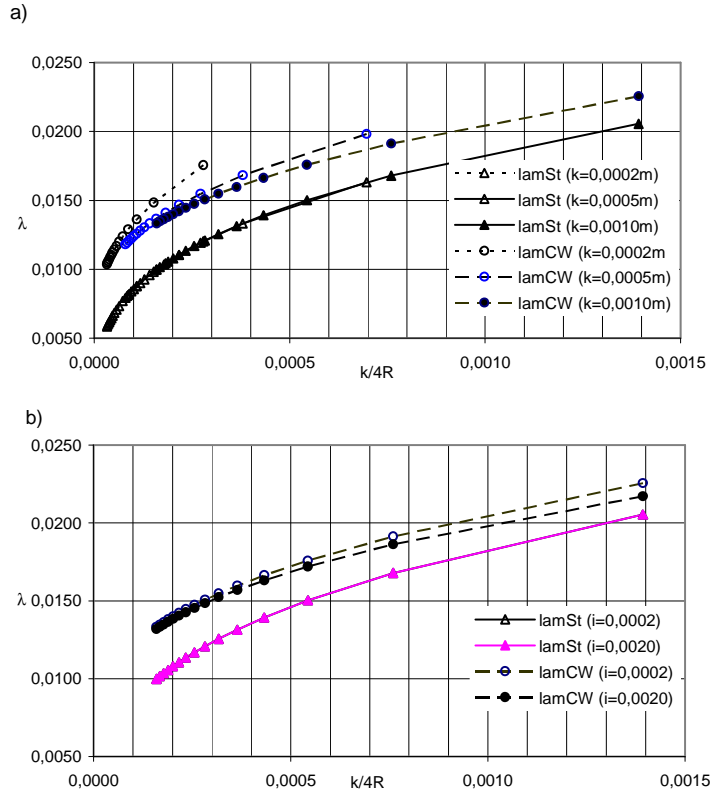
Przejściowa strefa przepływu.

W przejściowej strefie przepływu nie można przedstawić jawnej zależności dla współczynnika oporów ze wzoru (4) w funkcji chropowatości względnej. Z tego powodu porównanie wartości

współczynników oporu i prędkości wykonano dla obliczeń w korycie o trapezowym przekroju i nachyleniu skarp 1 : 1 oraz szerokości w dnie równej 3 m. Spadek dna koryta zmieniano w granicach 0,2–2‰, chropowatość zaś bezwzględną powierzchni dna i skarp koryta (k) zakładano zmienną w granicach 0,0002–0,5 m, co odpowiada zmianom wartości współczynnika szorstkości Stricklera (k_{St}) od 107,5 do 29,2 $m^{1/3} \cdot s^{-1}$ lub wartościom współczynnika szorstkości (n) ze wzoru Manninga od 0,009 do 0,034 $m^{-1/3} \cdot s$.

Dla przejściowego reżimu przepływu współczynniki oporu (λ) obliczono ze wzoru Stricklera (8) oraz ze wzoru Colebrooka-White'a (4).

Na rysunku 3 pokazano współczynniki oporów (λ) w funkcji $k/4R$ obliczone dla zmiennych chropowatości absolutnych $k \in < 0,0002 m; 0,001 m >$ przy stałym spadku $i = 0,2\%$ oraz przedsta-



lamSt – współczynniki oporów obliczone ze wzoru (8) / calculated friction factors from (8)
 lamCW – współczynniki oporów obliczone z zależności Colebrooka-White’a (4) / calculated friction factors from Colebrooka-White’ equation (4)

RYSUNEK 3. Obliczone współczynniki oporów w przejściowej strefie przepływu w funkcji $k/4R$: a – zmienna chropowatość absolutna przy spadku $i = 0,0002$, b – stała chropowatości absolutnej $k = 0,001\text{m}$ przy spadkach $i = 0,0002$ oraz $i = 0,0020$

FIGURE 3. The calculated friction factors for transition zone with the relative roughness $k/4R$: a – variable relative roughness for constant channel slope $i = 0,0002$, b – constant absolute roughness for $k = 0,001\text{m}$, channel slope $i = 0,0002$ and $i = 0,0020$

wiono zmiany współczynników oporu obliczone dla stałej chropowatości $k = 0,001\text{ m}$ przy spadku dna $i = 0,2\%$ oraz $i = 2\%$. Wynika z niego, że współczynniki oporu (λ) obliczone ze wzoru Stricklera są mniejsze od otrzymanych z zależności Colobrooka-White’a. Różnice te zwiększają się gdy maleje chropowatość względna koryta

$k/4R$ i staje się ono coraz gładze lub gdy maleje spadek dna.

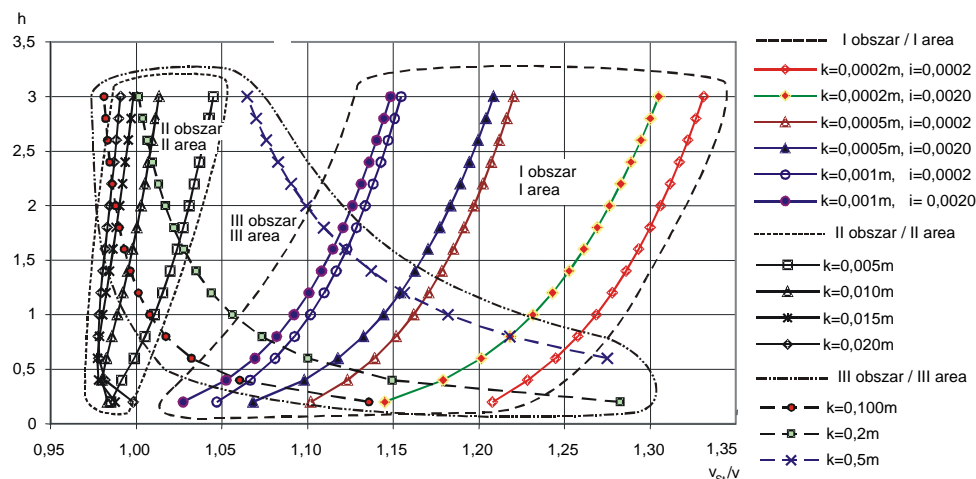
Dla przyjętych parametrów koryta obliczono wartości prędkości średnich, wykorzystując wzór Stricklera (v_{St}) i Darcy’ego-Weisbacha (v). Stosunki prędkości v_{St}/v w zależności od $k/4R$ dla przepływu w strefie przejściowej pokazano także na rysunku 2. Jak widać

różnice w obliczanych stosunkach prędkości są tym większe, im mniejsze są chropowatości względne powierzchni i mniejsze spadki, a więc przepływ odbywa się w pobliżu strefy hydraulicznie gładkiej.

Przeprowadzono analizę zmian stosunków średnich prędkości we wspomnianym trapezowym korycie obliczonych z równania Stricklera i z uniwersalnego prawa przepływu w strefie przepływu przejściowego i hydraulicznie szorstkiego wraz z głębokością (rys. 4)

zone są w hydraulicznie szorstkim reżimie przepływu (rys. 5).

Z rysunków 4 i 5 wynika, że charakter zmian stosunków prędkości v_{St}/v w funkcji głębokości zależy od położenia współczynników oporu w obszarze przepływu. Na tej podstawie wydzielono trzy obszary zmienności stosunków prędkości i współczynników oporu. Obszar I obejmuje stosunki prędkości obliczone w strefie przejściowej. Prędkości przepływu obliczane wzorem Stricklera dla $k = 0,001$ m przy $i = 0,2\%$

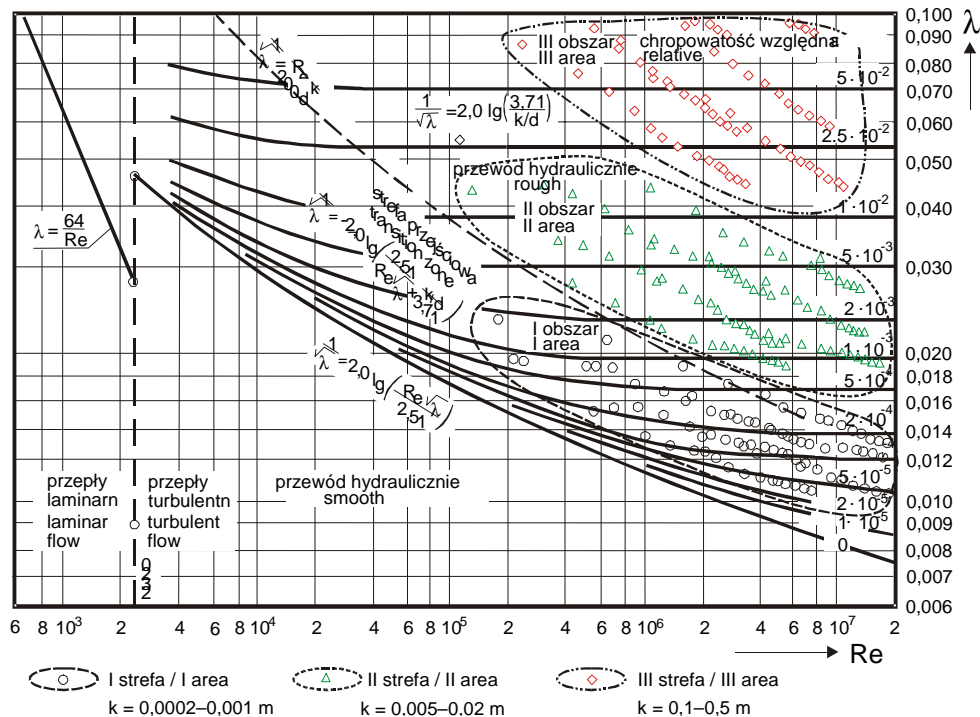


RYSUNEK 4. Stosunek średnich prędkości obliczonych wzorem Stricklera (v_{St}) i Darcy'ego-Weisbacha (v) w funkcji głębokości trapezowego koryta w obszarze przepływu przejściowego i hydraulicznie szorstkiego

FIGURE 4. Variation of the ratio of Strickler and Darcy-Weisbach velocities with the depth of the channel in rough and transition zones

oraz współczynników oporu (λ) w zależności od liczb Reynoldsa i chropowatości względnej (rys. 5). Stwierdzono, że w przejściowej strefie przepływu znajdują się współczynniki oporu obliczone dla chropowatości absolutnej $k = 0,0002-0,001$ m. Współczynniki oporu obliczone dla chropowatości bezwzględnych $k = 0,005-0,5$ m poło-

($n = 0,012m^{-1/3} \cdot s$) są od 4 do 16% większe od obliczonych na podstawie uniwersalnego prawa przepływu. Różnice w wartościach prędkości rosną wraz z głębokością przepływu (rys. 4). Dziesięciokrotne zwiększenie spadku w korytach o tej samej chropowatości absolutnej nieco zmniejsza te różnice, lecz nadal mieszczą się one w granicach



RYSUNEK 5. Obliczone współczynniki oporów (λ) naniesione na wykres Moody'ego
 FIGURE 5. The calculated friction factors (λ) shown on the Moody diagram

od 3 do 14%. Zmniejszanie chropowatości bezwzględnej powierzchni powoduje, że różnice w obliczanych wartościach prędkości gwałtownie rosną i w bardzo gładkim korycie o chropowatości absolutnej $k = 0,0002$ m oraz spadku $i = 0,2\text{‰}$ ($n = 0,009 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$) przekraczają 30%. W obszarze tym różnice w obliczanych wartościach prędkości rosną wraz z głębokością wody w korycie (rys. 4).

Zwiększenie chropowatości absolutnej powierzchni koryta powoduje, że pozostałe obliczone współczynniki oporu znajdują się w strefie hydraulicznie szorstkiej, jednak nie wszystkie otrzymane tu rozkłady v_{st}/v w funkcji h charakteryzują się podobną zmiennością i z

tego względu podzielono je na dwa obszary. Wydzielono obszar II, obejmujący wartości prędkości obliczone dla chropowatości absolutnych $k \in < 0,005 \text{ m}; 0,020 \text{ m} >$, oraz obszar III dla $k \in < 0,1 \text{ m}; 0,5 \text{ m} >$.

Prędkości obliczone ze wzoru Stricklera i uniwersalnego prawa przepływu w obszarze II są najbardziej zbliżone do siebie. Przy chropowatości absolutnej $k \in < 0,015 \text{ m}; 0,020 \text{ m} >$ (co odpowiada współczynnikom szorstkości Manninga z przedziału $n \in < 0,019 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s};$

$0,020 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s} >$) wszystkie prędkości obliczone wzorem Stricklera okazały się mniejsze o 2–3% od obliczonych wzo-

rem Darcy'ego-Weisbacha niezależnie od głębokości napełnienia. W korytach o małej chropowatości bezwzględnej powierzchni $k \in < 0,005 \text{ m}; 0,010 \text{ m} >$

$(n \in < 0,016 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}; 0,018 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s} >)$

prędkości obliczane wzorem Stricklera były mniejsze od obliczanych wzorem Darcy'ego-Weisbacha przy małych napełnieniach, przy rosnących zaś głębokościach relacja między obliczanymi prędkościami uległa odwróceniu ($v > v_{St}$). Różnice prędkości w II strefie nie przekraczają 5%.

Rozkłady prędkości obliczone dla chropowatości absolutnej $k > 0,1 \text{ m}$ ($n > 0,026 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$) zakwalifikowano do III obszaru zmian, gdzie różnice pomiędzy prędkościami obliczonymi wzorem Stricklera i wzorem Darcy'ego-Weisbacha wykazują tendencję malejącą wraz ze wzrostem napełnienia koryta. Dla przykładu, przy chropowatości bezwzględnej $k = 0,5 \text{ m}$ ($n = 0,034 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$) różnice w obliczanych prędkościach są w granicach 6–27%.

Podsumowanie

Przeprowadzone analizy obliczeń prędkości wykazały, że w strefie przepływu hydraulicznie szorstkiego stosowanie uniwersalnego prawa przepływu do obliczania przepustowości koryt daje wartości zbliżone do otrzymanych wzorami Manninga-Stricklera dla chropowatości względnych $k / 4R \in (0,001; 0,050)$. Otrzymane różnice nie przekraczają $\pm 3\%$. Poza tym przedziałem chropowatości względnych natężenia przepływu obliczane wzorem Manninga-Stricklera są większe od obliczanych

ze wzoru Darcy'ego-Weisbacha nawet o 20%.

W strefie przepływu hydraulicznie szorstkiego daje się wyodrębnić dwa obszary zmian v_{St}/v w zależności od głębokości koryta. Obszar II obejmuje przepływy znajdujące się na nomogramie Moody'ego w "sąsiedztwie" strefy przejściowej, gdzie chropowatości bezwzględne są w granicach $k = 0,005\text{--}0,020 \text{ m}$ (rys. 5). Wartości prędkości otrzymane w tym obszarze są zbliżone i wykazują niewielkie zmiany wraz z głębokością, przy czym dla $k = 0,015\text{--}0,020 \text{ m}$ prędkości obliczone wzorem Stricklera są mniejsze od obliczonych wzorem Darcy'ego-Weisbacha.

Przepływy w strefie hydraulicznie szorstkiej obliczone dla chropowatości bezwzględnych $k \geq 0,1 \text{ m}$ zakwalifikowano do III obszaru zmian. Wartości prędkości obliczone ze wzoru Stricklera są znacznie większe od obliczonych wzorem Darcy'ego-Weisbacha i różnice rosną wraz ze wzrostem chropowatości absolutnej oraz wraz ze zmniejszaniem się głębokości.

W przejściowej strefie przepływu obliczone stosunki prędkości średnich zależą od chropowatości koryta i od spadku dna. Różnice w obliczanych prędkościach pogłębiają się, gdy koryto staje się coraz gładsze, tzn. chropowatości absolutne maleją, oraz gdy zmniejsza się spadek dna. Różnice w obliczanych wartościach prędkości rosną również wraz ze wzrostem napełnienia, tzn. odwrotnie niż w korytach o dużej chropowatości i współczynnikach oporu znajdujących się w hydraulicznie szorstkim reżimie przepływu.

Podsumowując, należy stwierdzić, że weryfikacja przydatności obu wzorów możliwa jest jedynie na podstawie wartości uzyskanych z pomiarów.

Literatura

- HAGER W.H. 1988: Abflußformeln für Turbulente Strömungen. *Wasserwirtschaft* 78, 2: 79–84.
- HAGER W.H. 2001: Gauckler and the GMS Formula. *Journal of Hydraulic Engineering* 635–638.
- JIRKA G.H. 2004: Gerinnehydraulik. Vorlesungen, Institut für Hydromechanik Universität Karlsruhe.
- KUBRAK J. 1998: *Hydraulika techniczna*. Wydaw. SGGW, Warszawa.
- NAUDASCHER E. 1992: *Hydraulik der Gerinnebauwerke*. Springer Verlag.

Summary

Evaluation of channels discharge capacity. The calculation method of discharges capacity in rivers and channels are based on the Manning-Stricklera and Darcy-Weisbach friction factors to represent local

river bed stresses coupled with other fluid dynamic processes. This paper describes the comparison of the velocities computed with the use of both methods of the evaluation of friction factors. The velocities calculated within rough zone based on Manning-Strickler and Darcy-Weisbach friction factors agree with each other for relative roughness $k/4R \in (0.001; 0.050)$. When the relative roughness goes beyond this range or the flow is within smooth or transition zones, the velocities calculated on the basis of Manninga-Strickler friction factor are greater by about 20%. In rough zone there are two areas on Moody Diagram in which the ratio v_{st}/v changes with the depth of the channel. In the transition zone the difference between the calculated velocities based on two methods increase with the depth of the channel.

Author's address:

Elżbieta Kubrak
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska
02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159
Poland